Examen LM201.

Durée : deux heures. Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

15 décembre 2009.

Exercice 1

Calculer les racines troisièmes de $-\frac{9}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On définit f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) A quelle condition sur a et b a-t-on f continue sur $\mathbb{R}_+$?
b) Peut-on choisir a et b de sorte que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$? sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3

Calculer une primitive de $\frac{x^3}{x^2-4}$.

Exercice 4

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ xy + yz + zx & = & -1 \\ xyz & = & -1 \end{cases}$$

Exercice 5

a) Calculer $\arccos \cos \frac{19\pi}{6}$.
b) Donner le domaine de définition et une expression simplifiée de $\cos \arcsin x$.

Exercice 6

a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\ \forall \theta \in \mathbb{R}$
b) Linéariser $\cos^3(x)$ et en donner une primitive.

Exercice 7

$$(E)\ xy' + y = 1$$

a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$.
b) (E) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8

a) Donner le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} - 4u_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b) Donner l'expression générale d'une suite qui vérifie :

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} - 4u_n = 6n\ \forall n \in \mathbb{N}$$